THÉORIE DES GROUPES 2024 - 25, SÉRIE 3

Les 3 premiers exercices de cette série sont des résultats importants issus du cours *Structures algébriques*. Si vous ne vous sentez pas à l'aise avec ces résultats, nous vous encourageons à prendre le temps de les démontrer car les idées de leurs preuves réapparaîtront à plusieurs reprises tout au long du cours. N'hésitez pas à sauter ces exercices si vous vous sentez suffisamment confiant dans l'application de ces résultats.

Exercise 1. *Sous-groupes normaux et quotients de groupes*
Soit G un groupe et $H \subseteq G$ un sous-groupe. Montrez que les affirmations suivantes sont équivalentes :

(1) Le sous-groupe H est un sous-groupe normal de G.

(2) Chaque fois que $a_1, a_2, b_1, b_2 \in G$ sont tels que les classes à gauche $a_1H = b_1H$ et $a_2H = b_2H$, alors $a_1a_2H = b_1b_2H$. En d'autres termes, l'application

$$\begin{aligned} \cdot : G/H \times G/H &\to G/H \\ (g_1H, g_2H) &\mapsto g_1g_2H. \end{aligned}$$

est une fonction bien définie.

De plus, en utilisant l'énoncé ci-dessus, montrez que si H est un sous-groupe normal de G, alors l'ensemble des classes à gauche G/H possède une structure de groupe naturelle.

Exercise 2. *Premier théorème d'isomorphisme*
Soit $\phi : G \to F$ un homomorphisme et soit $H \trianglelefteq G$ un sous-groupe normal de G tel que $H \subseteq \ker \phi$.

(1) *Propriété universelle du groupe quotient*
Il existe un homomorphisme unique $\bar{\phi} : G/H \to F$ tel que le diagramme suivant commute (ce qui signifie que $\bar{\phi} \circ q = \phi$)

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "\phi"'] & G/H \arrow[d, "\bar{\phi}"] \\ & F \end{tikzcd}$$

où $q : G \to G/H$ est l'homomorphisme quotient.

(2) *Premier théorème d'isomorphisme*
Si $H = \ker \phi$, alors $\bar{\phi}$ est injectif et induit un isomorphisme $G/H \xrightarrow{\cong} \operatorname{im} \phi$.

Exercise 3. *Théorème de correspondance et troisième théorème d'isomorphisme*
Soit $H \trianglelefteq G$ un sous-groupe normal et soit $q : G \to G/H$ l'homomorphisme quotient.

(1) Montrez qu'il existe une correspondance entre les sous-groupes de G contenant H et les sous-groupes du quotient G/H. C'est-à-dire, montrez que les attributions suivantes forment des fonctions inverses entre ces deux ensembles :

$$\{\text{sous-groupes } F \leq G \mid H \leqslant F \leqslant G\} \longleftrightarrow \{\text{sous-groupes } K \leqslant G/H\}$$

$$F \longmapsto q(F) = F/H$$

$$q^{-1}(K) \longleftarrow\!\shortmid K$$

(2) Montrez que la correspondance ci-dessus se restreint à une correspondance entre sous-groupes normaux. C'est-à-dire que F est un sous-groupe normal de G contenant H si et seulement si $q(F)$ est un sous-groupe normal de G/H.

(3) Supposons que F soit un sous-groupe normal de G contenant H, alors montrez que

$$G/F \cong \frac{G/H}{q(F)} = \frac{G/H}{F/H}$$

Exercise 4. *Deuxième théorème d'isomorphisme*
Soit G un groupe et soient $H, F \leqslant G$ des sous-groupes tels que $F \leqslant N_G(H)$. Montrez que

(1) $F \cap H \trianglelefteq F$ et $H \trianglelefteq FH$

(2) Nous avons un isomorphisme $F/F \cap H \xrightarrow{\cong} FH/H$.

Rappelez-vous que le *normalisateur de H dans G* est défini comme

$$N_G(H) = \{g \in G : gH = Hg\}$$

et est un sous-groupe de G.

Rappelez-vous qu'une action de groupe est définie comme un homomorphisme de groupes de la forme $G \to \mathrm{Bij}(X)$. Dans l'exercice suivant, nous proposons une autre définition (équivalente) d'une action de groupe.

Exercise 5. *Équivalence des définitions des actions de groupe : Très important ! À retenir et à utiliser en pratique !*
Montrez qu'une action est précisément la donnée d'une application $\cdot : G \times X \to X$ telle que

(1) $e_G \cdot x = x$ pour tout $x \in X$;

(2) $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$ pour tous $g, h \in G$ et $x \in X$.

Plus précisément, vous devez montrer qu'il existe une bijection entre les ensembles

$$\{\Phi : G \to \mathrm{Bij}(X) \mid \Phi \text{ est une action}\} \cong \{\cdot : G \times X \to X \mid (1)\ \&\ (2) \text{ tiennent}\}.$$

Ensuite, entraînez-vous à passer d'une représentation d'une action de groupe à l'autre en la calculant explicitement pour les différentes actions que vous avez vues dans les dernières séries jusqu'à vous sentir à l'aise.

Exercise 6. (moyen)
Soit $\{e_G\} \neq H \leq G$ un sous-groupe et rappelez-vous l'action $G \times G/H \to G/H$ de la dernière série. Montrez que si H est normal dans G, alors l'action sur G/H n'est *pas* fidèle.

Exercise 7. (moyen) *Quelques propriétés des classes à gauche utiles en pratique*
Soit $H, K \leq G$ des sous-groupes d'un groupe G. Montrez que

(1) $gH = g'H$ si et seulement si $g'^{-1}g \in H$;
(2) $gH \cap g'H \neq \emptyset$ implique que $gH = g'H$;
(3) $gH \cap g'K$ est soit vide, soit une classe à gauche de $H \cap K$.

Exercise 8. (difficile) Soit G un groupe et soit H un sous-groupe de G d'indice 2. Rappelez-vous que l'indice d'un sous-groupe H est la cardinalité de l'ensemble G/H. Prouvez que cela implique que H est un sous-groupe normal de G.

Pour l'exercice suivant, rappelez-vous que deux G-ensembles X et Y sont isomorphes en tant que G-ensembles s'il existe une bijection $f : X \to Y$ telle que $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$.

Exercise 9. (difficile) *Un peu plus difficile ...*
Soit G un groupe. Soit $\mathcal{X}$ l'ensemble des actions G-transitives.

(1) Montrez que si X est isomorphe à Y en tant que G-ensembles, alors $G \curvearrowright X$ est transitive si et seulement si $G \curvearrowright Y$ est transitive.
(2) Déduisez que l'isomorphisme des G-ensembles définit une relation d'équivalence $\sim$ sur $\mathcal{X}$.
(3) Montrez qu'il existe une bijection entre l'ensemble des classes de conjugaison des sous-groupes de G et les classes d'isomorphisme des actions G-transitives. C'est-à-dire, montrez qu'il existe une bijection

$$\{\text{Classes de conjugaison des sous-groupes } H \leq G\ \} \cong \mathcal{X}/\sim$$

Utilisez ceci pour décrire les classes des actions G-transitives pour les groupes $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, S_3$.